2.7.17 Rovnice s neznámou pod odmocninou I

Předpoklady: 020713, 020714

Pedagogická poznámka: Látka této hodiny vyžaduje tak jednu a půl vyučovací hodiny, pokud nepospícháte, můžete obětovat hodiny dvě a nechat studenty počítat příklady z Petákové.

K názvu není co dodat. Budeme řešit rovnice, kde je neznámá pod odmocninou.

Zkusíme vyřešit rovnici: $\sqrt{x+1}=2$.

$\sqrt{x+1}=2 \quad /^2$ - abychom se zbavili odmocniny, umocníme rovnici na druhou.

$\left(\sqrt{x+1}\right)^2=2^2$ - obě strany rovnice jsou čísla, která musíme umocnit na druhou celá.

$x+1=4$

$x=3$

Nevypadá to tak složitě jenom proto, že jsme něco přehlédli:

1) Odmocninu nemůžeme udělat z čehokoliv $\Rightarrow$ musíme na začátku udělat podmínky.

$\sqrt{x+1} \Rightarrow x+1 \geq 0$

$x \geq -1$ $\Rightarrow$ Pokud by vyšlo číslo menší než –1, byl by to nesmysl, ne řešení.

2) Abychom se zbavili odmocnin, musíme dát rovnici na druhou.

$2=2 \quad /^2$ $\qquad$ $2 \neq -2 \quad /^2$

$4=4$ $\qquad$ $4=4$

Umocněním mohou přibýt čísla, která se tváří jako výsledek, ale nejsou správná (stává se to ve chvíli, kdy na obou stranách rovnice jsou čísla navzájem opačná, umocnění zlikviduje znaménko a mocniny se pak rovnají).

Co s tím?

a) Všechno, co vyjde, zkontrolujeme zkouškou (pokud je výsledků omezené množství) $\Rightarrow$ řešíme najednou oba problémy, ale nemůže zkontrolovat nekonečně mnoho kořenů.

b) Uděláme podmínky a hlídáme před umocněním znaménka obou stran rovnice (kořeny přibývají při umocňování, když mají strany rovnice jiná znaménka) $\Rightarrow$ je to pracnější, ale funguje to i u nekonečného množství kořenů.

Pedagogická poznámka: Zbytek hodiny je krásnou demonstrací toho, jak studenti ignorují obecná pravidla, která jim někdo nadiktuje. Připomínám jim to, aby si příště dali větší pozor. Na střední škole je sice běžné, že vlastně každé pravidlo je ihned demonstrováno na příkladu (a stačí tedy dávat pozor až na ty příklady), na vysoké škole to však již rozhodně neplatí.

Př. 1: Vyřeš rovnici: $\sqrt{x+1}=-2$.

$\sqrt{x+1}=-2 \quad /^2$

$\left(\sqrt{x+1}\right)^2=(-2)^2$

$x+1=4$
$x=3$
Zkouška:
$L=\sqrt{x+1}=\sqrt{3+1}=2$
$P=-2$
$L\neq P \Rightarrow K=\emptyset$

Př. 2: Vysvětli, kdy se objevilo při řešení předchozího příkladu nesprávné řešení $x=3$. Jakým způsobem by bylo možné změnit levou stranu rovnice $\sqrt{x+1}=-2$ tak, aby se číslo 3 stalo kořenem této upravené rovnice?

Problém je vidět ze zkoušky. Při dosazení $x=3$ do rovnice je levá strana rovna 2, pravá –2, po umocnění se obě strany rovnice rovnají 4 a číslo 3 se zdá být řešením rovnice.

Úpravou bychom museli dosáhnout toho, aby levá strana rovnice byla záporná $\Rightarrow$ vynásobili bychom ji –1 $\Rightarrow$ $-\sqrt{x+1}=-2$. Pak bude při dosazení $x=3$ levá i pravá strana rovna –2.

Z předchozího je vidět, že rovnice $\sqrt{x+1}=-2$ nemá řešení už na první pohled:
- levá strana je nezáporná (odmocnina může být pouze nezáporné číslo),
- pravá strana je záporná

$\Rightarrow$ obě strany se nikdy nemohou rovnat a rovnice tedy nemůže mít řešení.

Př. 3: Vyřeš rovnici $\sqrt{x-2}=x-4$.

$\sqrt{x-2}=x-4 \quad /^2$
$\left(\sqrt{x-2}\right)^2=(x-4)^2$
$x-2=x^2-8x+16$
$0=x^2-9x+18$
$(x-3)(x-6)=0$
$x_1=3 \qquad x_2=6$
$K_?=\{3;6\}$ Nevíme, zda to je opravdu řešení, nic jsme nekontrolovali.
Zkouška (nutná):
$x=3$
$L=\sqrt{x-2}=\sqrt{3-2}=\sqrt{1}=1$
$P=x-4=3-4=-1$
$L\neq P$ $\Rightarrow$3 není kořen (pro $x=3$ jsou hodnoty obou stran rovnice, kterou jsme umocňovali opačná čísla, která se rovnají až po umocnění).
$x=6$
$L=\sqrt{x-2}=\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2$
$P=x-4=6-4=2$
$L=P \Rightarrow$ 6 je kořen
$K=\{6\}$

Pedagogická poznámka: Asi tak třetina studentů (zejména ti, kteří si neopsali druhý řádek příkladu 1, ačkoliv na něj vždy upozorňuji) umocní rovnici do špatného tvaru: $x-2=x^2-16$ nebo $x-2=x^2+16$. Tato chyba je důsledkem nedodržení pravidla: „rovnice je rovnost čísel – stran rovnice $\Rightarrow$ musíme umocnit obě čísla jako celek“.

Př. 4: Vyřeš rovnici $\sqrt{2x-5}=\sqrt{1-x}$.

$\sqrt{2x-5}=\sqrt{1-x} \quad /^2$
$2x-5=1-x$
$3x=6$
$x=2$

Zkouška:
$x=2$
$L=\sqrt{2x-5}=\sqrt{2\cdot 2-5}=\sqrt{-1}$ - nejde, pro $x=2$ není levá strana definována.
$K=\emptyset$

Pedagogická poznámka: Opět se objeví skupina studentů, kteří ukolébáni předchozími příklady neudělají zkoušku a dojdou k výsledku $K=\{2\}$. Ještě horší jsou pak výjimečné případy, kterým zkouška vyjde tím, že spočtou $\sqrt{-1}=-1$ nebo $\sqrt{-1}=1$. Na přímý dotaz, jestli je možné spočítat druhou odmocninu ze záporného čísla, samozřejmě odpoví, že ne, ale snaha dojít k výsledku je u nich silnější než všechna pravidla.

Mohli jsme na to přijít pomocí podmínek už na začátku:
$\sqrt{2x-5}\Rightarrow 2x-5\ge 0\Rightarrow x\ge\frac{5}{2}$
$\sqrt{1-x}\Rightarrow 1-x\ge 0\Rightarrow x\le 1$
Obě podmínky nesplňuje žádné reálné číslo $\Rightarrow$ nemůžeme do rovnice žádné číslo dosadit $\Rightarrow$ rovnice nemá řešení.

Př. 5: Vyřeš rovnici $-\sqrt{10+x-x^2}=1-x$.

$-\sqrt{10+x-x^2}=1-x \quad /^2$
$\left(-\sqrt{10+x-x^2}\right)^2=(1-x)^2$
$10+x-x^2=1-2x+x^2$
$0=2x^2-3x-9$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-9)}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm\sqrt{81}}{4}=\frac{3\pm 9}{4}$$
$x_1=\frac{3+9}{4}=3$
$x_2=\frac{3-9}{4}=-\frac{3}{2}$

Zkouška:
$x=3$

$$L = -\sqrt{10+x-x^2} = -\sqrt{10+3-3^2} = -\sqrt{4} = -2$$
$$P = 1-x = 1-3 = -2$$
$$L = P$$
$$x = -\frac{3}{2}$$
$$L = -\sqrt{10+x-x^2} = -\sqrt{10+\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = -\sqrt{10-\frac{3}{2}-\frac{9}{4}} = -\sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{5}{2}$$
$$P = 1-x = 1-\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$$
$$L \neq P$$
$$K = \{3\}$$

Pedagogická poznámka: Kouzlo předchozího příkladu je v tom, že značná část studentů zjistí, že nemá žádné řešení. Opět totiž špatně umocňují rovnici takto:

$$-\sqrt{10+x-x^2} = 1-x \quad /^2$$
$$-\left(\sqrt{10+x-x^2}\right)^2 = (1-x)^2$$ - „mínus přece není žádné číslo“
$$-\left(10+x-x^2\right) = 1-2x+x^2$$

Příklad pak rychle vede ke špatnému výsledku $x = 11$, který studenti vyloučí zkouškou.

Problém je stejný jako v předchozích případech, studenti nevnímají stranu rovnice jako jedno číslo, které dávají na druhou.

Př. 6: Vyřeš rovnici $2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+4} = 1$.

$$2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+4} = 1 \quad /^2$$
$$\left(2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+4}\right)^2 = (1)^2$$
$$4(x-1)-4\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+4}+x+4 = 1$$
$$4x-4-4\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+4}+x+4 = 1$$

$5x-4\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+4} = 1$ - v tomto stavu nemůžeme násobit, na levé straně by byl vzorec a zůstala by tam odmocnina $\Rightarrow$ převedeme odmocniny na pravou stranu (tím zmizí mínus) a vše ostatní na levou.

$$5x-1 = 4\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+4} \quad /^2$$
$$(5x-1)^2 = \left(4\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+4}\right)^2$$
$$25x^2-10x+1 = 16(x-1)(x+4)$$
$$25x^2-10x+1 = 16\left(x^2+4x-x-4\right)$$
$$25x^2-10x+1 = 16\left(x^2+3x-4\right)$$
$$9x^2-58x+65 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-58)\pm\sqrt{(-58)^2-4\cdot 9\cdot 65}}{2\cdot 9} = \frac{58\pm\sqrt{1024}}{18} = \frac{58\pm 32}{18} = \frac{29\pm 16}{9}$$

$$x_1 = \frac{29+16}{9} = \frac{45}{9} = 5$$
$$x_2 = \frac{29-16}{9} = \frac{13}{9}$$

Zkouška:

$x = 5$

$L = 2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4} = 2\sqrt{5-1} - \sqrt{5+4} = 2\cdot 2 - 3 = 1$

$P = 1$

$L = P$

$x = \frac{13}{9}$

$L = 2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4} = 2\sqrt{\frac{13}{9}-1} - \sqrt{\frac{13}{9}+4} = 2\cdot\frac{2}{3} - \frac{7}{3} = -1$

$P = 1$

$L \neq P$

$K = \{5\}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad vyřeší napoprvé samostatně pouze velmi málo studentů. Těm rychlejším, kteří ho počítají v době, kdy polovina třídy ještě řeší předchozí příklady, nejdříve říkám jenom to, že musí postupovat podle základního pravidla (rovnice jako rovnost čísel a jejich umocnění vcelku), poté ukážu začátek celé třídě. Pro mě překvapivě je počet studentů, kteří sami přijdou na to, že před druhým umocňováním musí na jedné straně nechat odmocniny samotné, podstatně vyšší než počet těch, kteří překonají původní ostych a umocní počáteční tvar rovnice.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je v podstatě bonus pro nejlepší, většina třídy se k němu v hodině nedostane.

Př. 7: Vyřeš rovnici $\sqrt{y+4} + 3\sqrt{y} = 7$.

$\sqrt{y+4} + 3\sqrt{y} = 7 \quad /^2$

$\left(\sqrt{y+4} + 3\sqrt{y}\right)^2 = (7)^2$

$y + 4 + 2\cdot\sqrt{y+4}\cdot 3\sqrt{y} + 9y = 49$

$10y + 6\sqrt{y+4}\cdot\sqrt{y} = 45$ - v tomto stavu nemůžeme násobit, na levé straně by byl vzorec a zůstala by tam odmocnina $\Rightarrow$ převedeme y na levou stranu.

$6\sqrt{y+4}\cdot\sqrt{y} = 45 - 10y \qquad /^2$

$\left(6\sqrt{y+4}\cdot\sqrt{y}\right)^2 = (45-10y)^2 \qquad /^2$

$36(y+4)y = 2025 - 900y + 100y^2$

$36y^2 + 144y = 2025 - 900y + 100y^2$

$64y^2 - 1044y + 2025 = 0$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1044) \pm \sqrt{(-1044)^2 - 4 \cdot 64 \cdot 2025}}{2 \cdot 64} = \frac{1044 \pm 756}{2 \cdot 64}$$

$$y_1 = \frac{1044 + 756}{2 \cdot 64} = \frac{225}{16}$$

$$y_2 = \frac{1044 - 756}{2 \cdot 64} = \frac{9}{4}$$

Zkouška:

$$y = \frac{225}{16}$$

$$L = \sqrt{y+4} + 3\sqrt{y} = \sqrt{\frac{225}{16} + 4} + 3\sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{17}{4} + 3\frac{15}{4} = \frac{62}{4} = 15,5$$

$$P = 7$$

$$L \neq P$$

$$y = \frac{9}{4}$$

$$L = \sqrt{y+4} + 3\sqrt{y} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} + 3\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{2} + 3\frac{3}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$P = 7$$

$$L = P$$

$$K = \left\{\frac{9}{4}\right\}$$

Př. 8: Petáková:
strana 14/cvičení 20 a) c) d)

Shrnutí: Při řešení rovnic s neznámou pod odmocninou musíme buď dělat zkoušku, nebo psát podmínky. Stranu rovnice umocňujeme jako jedno číslo.